UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR

PREPARADURIA DE MATEMATICAS

MATEMATICAS 5 (MA-2112) VIERNES 3-02-2012

Miguel Guzmán (magt369@gmail.com)

***.-** Sea la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^4}{x^4+y^6} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

i. $\forall d=\binom{d_1}{d_2}$, $\|d\|=1$, existe en $(0,0)$ la derivada d f en dirección d.

ii. f no es diferencial $(0,0)$.

SOLUCION.

i.- Se tiene que $f(0,0)=0$ y además

$$\lim_{t\to 0}\frac{\left[f\binom{td_1}{td_2}=\dfrac{td_1(td_2)^4}{(td_1)^4+(td_2)^6}\right]-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^5d_1d_2^4}{t^4(d_1^4+t^2d_2^6)}}{t}$$

Observamos que $d_1\neq 0$ entonces

$$\lim_{t\to 0}\quad=\begin{cases}\dfrac{d_1d_2^4}{d_1^4} & si\ \ d_1\neq 0\\ 0 & si\ \ d_1=0\end{cases}$$

Mosca para $d_1=0$ debe buscar el límite en el comienzo.

Ahora se tiene $\|d\|=1 \quad\rightarrow\quad d_1^2+d_2^2=1\ ;\ d_1=0\ \rightarrow\ d_2=\pm 1.$

ii.- Para demostrar que no es diferencial evaluemos el límite de la función a través de la trayectoria $y^3=mx^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{xm^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^4}{x^4(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\frac{m^{\frac{4}{3}}}{1+m^2}\qquad NO\ EXISTE$$

La función no es continua luego no es diferenciable.

1.- Sea $S = \left\{(x,y,z) \in R^3 : \sin(z) - xz + y - \frac{1}{2} = 0\right\}$ y L la intersección de los planos $x - y - z = 1$ y $y + z = 0$. Determine el punto de S en el cual el plano tangente es perpendicular a L, así como la ecuación de dicho plano.

Solución.

$$S(x,y,z) := \sin(z) - x\cdot z + y - \frac{1}{2}$$

Buscamos gradiente.

$$\mathrm{GradS}(x,y,z) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx}S(x,y,z) \\ \frac{d}{dy}S(x,y,z) \\ \frac{d}{dz}S(x,y,z) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -z \\ 1 \\ \cos(z) - x \end{pmatrix}$$

La intersección de los planos $\pi 1 = x - (y + z) - 1$ $\pi 2 = y + z$

Se tiene que $x = 1$ $z + y = 0$ $y = -z$

El vector director de la recta intersección es: $l := (0, 1, -1)$ el $l := (0, -1, 1)$ tambien es valido

Luego por paralelismo

$$\begin{pmatrix} -z \\ 1 \\ \cos(z) - x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

De (2) $\lambda = 1$

De (1) $z = 0$

De (3) $x = 2$

Buscamos (y) de la ecuacion

$$y = \frac{1}{2}$$

Punto del plano $B := \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

El plano tangente será:

$$0 = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + \frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix} >$$

implica que:

$$y - z + \frac{1}{2} = 0$$

2.- Sea $f: R^2 \rightarrow R$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3} & si \;\; x \neq -y \\ 0 & si \;\; x = -y \end{cases}$$

a) Halle la derivada direccional de f en (0,0) según un vector unitario $u = (u_1, u_2)$ tal que $u_1 \neq -u_2$

b) Halle (si existe) las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

c) Es f diferenciable en (0,0)

Solución.

$$f(x,y) := \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3} \qquad \text{if}(x+y \neq 0)$$

$$f1(x,y) := 0 \qquad \text{if } x+y=0$$

A.) Sea $u = (u1,u2)$ la norma del vector será $|u| = \sqrt{u1^2+u2^2}$ el vector debe ser unitario luego

$$d = \frac{u}{|u|} = \frac{1}{\sqrt{u1^2+u2^2}}(u1,u2) = (d1,d2)$$

Ya que no sabemos si f(x,y) es o no es diferenciable, procedemos a la definición de derivada direccional.

$$\lim_{t \to 0}\left[\frac{f(td1,td2)-f(0,0)}{t} = \frac{\frac{(d1^2+d2^2)}{t\cdot(d1^3+d2^3)}-0}{t} = \frac{(d1^2+d2^2)}{t^2\cdot(d1^3+d2^3)}\right] = \infty$$

Luego no existe la derivada direccional.

B) $\frac{d}{dx}f(0,0)$ $\qquad$ $\frac{d}{dy}f(0,0)$

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{f(h,0)-f1(0,0)}{h}\right) \to \infty \qquad \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(0,h)-f1(0,0)}{h}\right) \to \infty$$

C) f no es diferenciable por que no existe el gradiente de f (o derivadas parcial)

3.- Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} xy(x^2+y^2) & si\;\; x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+y^2-xy & si\;\; x^2+y^2 > 1 \end{cases}$$

En el punto $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ calcular su valor de derivada f en dirección $d = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,-2)$.

SOLUCION.

Para $p = (x_a + td_1, y_a + td_2)$ se tiene que

$$\begin{cases} si\;\; t > 0\;\; entonces\; estoy\; dentro\; del\; circulo \\ si\;\; t < 0\;\; entonces\; estoy\; afuera\; del\; circulo. \end{cases}$$

Entonces se tiene

$$f\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + t\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + t\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{pmatrix} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}}t + \frac{2}{5}t^2\right)\left(1 - \frac{6}{\sqrt{10}}t + t\right) & si \;\; t > 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}}t + \frac{3}{5}t^2 & si \;\; t < 0 \end{cases}$$

Y además $f(A) = \frac{1}{2}$.

Tomamos ahora límite direccional

$$\lim_{t \to 0} \frac{\left(f\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + t\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + t\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{pmatrix} - f(A) \right)}{t}$$

Debemos tomar límites laterales.

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{-\frac{3}{\sqrt{10}}t + \frac{3}{5}t^2}{t} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{-\frac{6}{\sqrt{10}}t + \frac{9}{10}t^2 - \frac{27}{5\sqrt{10}}t^3 + \frac{2}{5}t^4}{t} = -\frac{6}{\sqrt{10}}$$

Se concluye que el límite no existe por lo cual no hay derivada en esta dirección.

4.- Sea $3x^2 + y^2 + z^2 + 4xz - 3xy - 15 = 0$ define a $z = f(x,y)$ como un función implícita, halle la derivada de z.

SOLUCION

Se tiene por composición

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = f(x,y) \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta} R \quad luego \quad h = \theta o f$$

Donde $\theta(x,y) = 3x^2 + y^2 + z^2 + 4xz - 3xy - 15 = 0$

Por composición $\nabla h = \nabla\theta * \nabla f$, básicamente $\nabla h = (0,0)$

Entonces

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = (\,6x+4z-3y, 2y-3x, 2z+4x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix} =>$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(6x+4z-3y)+(2z+4x)\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ (2y-3x)+(2z+4x)\dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix} => \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{6x+4z-3y}{2z+4x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{3x-2y}{2z+4x}\end{cases}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix}-\dfrac{6x+4z-3y}{2z+4x}\\ \dfrac{3x-2y}{2z+4x}\end{pmatrix}$$

5.- Cerca del punto $A\left(1,1,-\frac{\pi}{2}\right)$ la ecuación

$$xy + xz + yz + \sin(xyz) + \pi = 0$$

Define una función $z = f(x,y)$ implícitamente. Halle el plano tangente a la grafica si $x_0 = y_0 = 1$.

SOLUCION.

Ya que se trata de una curva de nivel, el plano tangente será

$$z - z_p = \langle \nabla f(x_p, y_p), \begin{pmatrix}x - x_p\\ y - y_p\end{pmatrix}\rangle$$

Buscamos el gradiente de la función, con derivación implícita, sabemos que

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix}x\\ y\\ z = f(x,y)\end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} R \quad luego \quad h = \varphi o f$$

Luego $Dh = D\varphi * Df$

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = (y + z + yz\cos(xyz)\,, x + z + xz\cos(xyz)\,, x + y + xy\cos(xyz))\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}$$

Despejamos y tenemos el gradiente de $f(x,y)$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}-\dfrac{y + z + yz\cos(xyz)}{x + y + xy\cos(xyz)}\\ -\dfrac{x + z + xz\cos(xyz)}{x + y + xy\cos(xyz)}\end{pmatrix}$$

Evaluamos en el punto A.

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\pi - 2}{4} \\ \frac{\pi - 2}{4} \end{pmatrix}$$

Luego el plano tangente será $\quad z = \frac{\pi-2}{4}(x+y) - \pi + 1$

***.-** La ecuación $u + \ln(u) = xy$ define implícitamente $u = f(x,y)$, si f es diferenciable, halle

$$\frac{\partial f}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

SOLUCION.

Sabemos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = f(x,y) \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} R \quad luego \quad h = \varphi o f$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-y \,, -x \,, 1 + \frac{1}{u}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{yu}{u+1} \\ \frac{xu}{u+1} \end{pmatrix}$$

Para la derivada cruzada tenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xu}{u+1}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x f(x,y)}{f(x,y)+1}\right)$$

Luego derivamos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\left(\left(f + x\frac{\partial f}{\partial x}\right)(1+f) - xf\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)}{(1+f)^2}$$

Sustituimos lo conocido

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\left(u + \frac{xyu}{u+1}\right)(1+u) - xu\left(\frac{yu}{u+1}\right)}{(1+u)^2} = \frac{\left(u(1+u) + xyu - \frac{xyu^2}{u+1}\right)}{(1+u)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{u}{(1+u)^3}(1 + 2u + u^2 + xy)$$

6.- Halle el desarrollo del polinomio de Taylor alrededor de $(0,0)$ de la función

$$f(x,y)=e^{-x^2-y^2}\cos(xy)$$

SOLUCION.

Buscamos primero el gradiente de la función

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2}(-2x\cos(xy)-y\sin(xy)) \\ e^{-x^2-y^2}(-2y\cos(xy)-x\sin(xy)) \end{pmatrix}$$

Y ahora buscamos la Hessiana evaluada en el punto $(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x^2-y^2}(-2x\cos(xy)-y\sin(xy))\right)$$
$$=e^{-x^2-y^2}(-2x(-2x\cos(xy)-y\sin(xy))+(-2(\cos(xy)-xy\sin(xy))-y^2\sin(xy))=-2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{-x^2-y^2}\left(-2y(-2x\cos(xy)-y\sin(xy))+\left(2x^2\sin(xy)-(\sin(xy)+xy\cos(xy))\right)\right)=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}e^{-x^2-y^2}(-2y\cos(xy)-x\sin(xy))$$
$$=e^{-x^2-y^2}\left(-2y(-2y\cos(xy)-x\sin(xy))+(-2(\cos(xy)-yx\sin(xy))-x^2\cos(xy))\right)=-2$$

Luego $H(0,0)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

El polinomio de Taylor será

$$f(x,y)=f(0,0)+\langle\nabla f(0,0),\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle+\frac{1}{2}\langle H(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle$$

Con $\nabla f(0,0)=0$

$$f(x,y)=1+\frac{1}{2}\langle\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle \Rightarrow f(x,y)=1+\frac{1}{2}\langle\begin{pmatrix} -2x \\ -2y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle$$

$$f(x,y)=1-x^2-y^2$$

7.- Hallar y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x,y)=4x^3-2x^2y+y^2+10$$

SOLUCION.

Buscamos primero que todo el gradiente de la función

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} 12x^2-4xy \\ -2x^2+2y \end{pmatrix}$$

Para los puntos críticos el gradiente debe ser nulo, se tiene entonces

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4xy \\ -2x^2 + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;=>\; \begin{cases} 12x^2 = 4xy \\ \quad y = x^2 \end{cases} => \;\; 3x^2 = x^3 =>$$

$$x^2(x-3) = 0 \;\; => \begin{cases} x = 0 \;\; => \;\; y = 0 \\ x = 3 \;\; => \;\; y = 9 \end{cases}$$

Entonces se generan los puntos $A(0,0)$ $B(3,9)$

Buscamos la Hessiana para clasificarlos

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 24x - 4y & -4x \\ -4x & 2 \end{pmatrix}$$

Para punto A, $H(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(H(A)) = 0 \quad NO\ CONCLUYO$

Para punto B, $H(B) = \begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(H(B)) = 72 - 144 < 0$, luego B es SILLA.

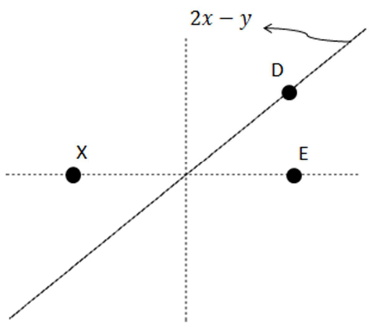
Veamos para el punto A, estudiamos los valores cercanos a (0,0)

$$f(x,y) = 2x^2(2x - y) + y^2 + 10 \;\; ; \;\; f(0,0) = 10$$

$$f(D) = y^2 + 10 > 10$$

$$F(E) > (0,0) \quad y \quad F(X) < (0,0)$$

Luego A es un Punto Silla.



8.- Sea la función $g: R^2 \to R^2$ definido por

$$g(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 + v \\ uv \end{pmatrix}$$

La ecuación $(1 + x^2)z + y^2e^z - y = 0$ define $z = f(x,y)$ alrededor del punto $(0,0)$ y sea $h = fog$, halle

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(0,0)$$

SOLUCION.
Suponemos que f es C^2
Sabemos que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} u^2 + v \\ uv \end{pmatrix} \xrightarrow{f} R \quad por\ lo\ cual\ \ h = fog$$

Entonces; $\nabla h(u,v) = \nabla f(x,y)\nabla g(u,v)$

Pero $f(x,y)$es una función implícita

Sabemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{m} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z = f(x,y) \end{pmatrix} \xrightarrow{\theta} R \quad \textit{por lo cual} \quad l = \theta o m$$

Donde $\theta(x,y,z) = (1+x^2)z + y^2e^z - y = 0$ y además $\nabla l = \nabla\theta\nabla m$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz & 2ye^z - 1 & (1+x^2) + y^2e^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Despejamos

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2xz}{1+x^2+y^2e^z} \\ -\dfrac{2ye^z-1}{1+x^2+y^2e^z} \end{pmatrix}$$

Ahora

$$\nabla h(u,v) = \begin{pmatrix} -\dfrac{2xz}{1+x^2+y^2e^z} & -\dfrac{2ye^z-1}{1+x^2+y^2e^z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \end{pmatrix}$$

Recuerde que $x = u^2 + v \quad y \quad y = uv$

Despejamos $\frac{\partial h}{\partial v}$

$$\frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{2xz}{1+x^2+y^2e^z} - \left(\frac{2ye^z-1}{1+x^2+y^2e^z}\right)u \;\; => \;\; \boldsymbol{\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{-2xz - (2ye^z - 1)u}{1+x^2+y^2e^z}}$$

Y ahora derivamos con respecto a u

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-2xz - (2ye^z-1)u}{1+x^2+y^2e^z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} = \frac{\left(\left(-2\left(\frac{\partial x}{\partial u}z + x\frac{\partial z}{\partial u}\right) - 2u\left(\frac{\partial y}{\partial u}e^z + ye^z\frac{\partial z}{\partial u}\right) - (2ye^z-1)\right)(1+x^2+y^2e^z) - \left((-2xz-(2ye^z-1)u)\left(2x\frac{\partial x}{\partial u} + e^z 2y\frac{\partial y}{\partial u} + y^2e^z\frac{\partial z}{\partial u}\right)\right)\right)}{(1+x^2+y^2e^z)^2}$$

Ya que nos piden $\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(0,0)$, se tiene $x = 0 \;\; y \;\; y = 0 \;\; => \;\; z = 0$

Y además $\frac{\partial x}{\partial u} = 2u$; $\frac{\partial x}{\partial u}_{u=0} = 0$; $\frac{\partial y}{\partial u} = 0$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}(0,0) = 1$$

9.- Hallar y clasificar los puntos críticos de f.

$$f(x,y) = (x+y)\sin(x-y)$$

Solución

Hallamos el gradiente. $\quad \mathrm{gradF}(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y) \\ \frac{d}{dy} f(x,y) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sin(x-y) + \cos(x-y)\cdot(x+y) \\ \sin(x-y) - \cos(x-y)\cdot(x+y) \end{bmatrix}$

Cuando el gradiente es cero se tiene un punto critico.

$$\sin(x-y) + \cos(x-y)\cdot(x+y) = 0 \qquad (1)$$

$$\sin(x-y) - \cos(x-y)\cdot(x+y) = 0 \qquad (2)$$

De (2) $\quad \sin(x-y) = (x+y)\cos(x-y) \qquad (3)$

Sustituimos (3) en (1) $\quad 2(x+y)\cdot\cos(x-y) = 0 \qquad (x+y) = 0 \quad x = -y \quad (4)$

$$\cos(x-y) = 0 \qquad x - y = \frac{(2k+1)\pi}{2} \qquad (5)$$

Sustituyendo el resultado (4) en (3)

$\sin(x-y) = 0 \qquad x - y = k\pi$ y además $2x = k\pi \qquad x = \frac{k\pi}{2}$ y $y = \frac{-k\pi}{2}$

Sustituyendo el resultado (5) en (3)

$\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2}\right] = 0$ pero sabemos que $\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{2}\right] = (-1)^k$ lo que hay una indeterminación.

Por lo tanto no hay solución por esta rama.. las únicas soluciónes serán

$$x = \frac{k\pi}{2} \qquad y = \frac{-k\pi}{2} \qquad \text{para} \quad k\varepsilon(0,1,2,3,4,...)$$

Los puntos críticos serán. $\quad A(k) := \begin{pmatrix} \frac{k\cdot\pi}{2} \\ \frac{-k\cdot\pi}{2} \end{pmatrix}$

Clasificamos los puntos, por Hessiana

$$H(x,y) := \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dx^2} f(x,y) & \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx} f(x,y)\right) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy} f(x,y)\right) & \frac{d^2}{dy^2} f(x,y) \end{bmatrix}$$

$$H(x,y) \rightarrow \begin{bmatrix} 2\cdot\cos(x-y) - \sin(x-y)\cdot(x+y) & \sin(x-y)\cdot(x+y) \\ \sin(x-y)\cdot(x+y) & -2\cdot\cos(x-y) - \sin(x-y)\cdot(x+y) \end{bmatrix}$$

Buscamos determinante en el punto.

$\left| H\left(\frac{k\cdot\pi}{2}, \frac{-k\cdot\pi}{2}\right) \right| \rightarrow -4\cdot\cos(\pi\cdot k)^2 \quad < 0$ $\quad$ Luego todos los puntos son SILLAS.